

08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

APLICAÇÃO DA TÉCNICA ADJUNTA EM PROBLEMAS DE TRANSPORTE MULTIGRUPO DE ENERGIA DO TIPO FONTE-DETECTOR EM GEOMETRIA BIDIMENSIONAL USANDO UM MÉTODO ESPECTRONODAL

Jesús P. Curbelo¹ - jcurbelo86@gmail.com

Odaír P. da Silva¹ - odairpds@gmail.com

Ricardo C. Barros¹ - rcbarros@pq.cnpq.br

¹Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto Politécnico – Nova Friburgo, RJ, Brazil

Resumo. Neste trabalho é apresentada a aplicação da técnica adjunta a problemas de transporte do tipo fonte-detector em geometria cartesiana na formulação de ordenadas discretas de ordem N (S_N) usando um método espectral nodal. Para problemas de transporte de partículas neutras em geometria bidimensional retangular, o método de malha grossa Spectral Green's Function adjunto com aproximação constante no nodo para os termos correspondentes às fugas transversais (SGF[†]-CN) é estendido a problemas multigrupo de energia considerando espalhamento isotrópico. As equações discretizadas do método SGF[†]-CN são resolvidas utilizando o esquema iterativo de inversão nodal parcial (NBI[†], cf. partial one-node block inversion) que, para o problema adjunto, utiliza as mais recentes estimativas para todos os fluxos angulares adjuntos nas direções emergentes de um dado nodo espacial para determinar os fluxos angulares adjuntos nas direções incidentes no nodo que constituem as direções emergentes do nodo adjacente. Resultados numéricos são apresentados visando a ilustrar a precisão da técnica dos problemas adjuntos para estimativa de leitura de detectores de partículas neutras.

Palavras chave: Problema adjunto de transporte, Ordenadas discretas, Método espectral nodal, Problemas fonte-detector

1. INTRODUÇÃO

A solução da equação que é adjunta à equação que modela matematicamente o transporte de partículas neutras, tem significado físico como uma medida da importância de uma partícula, que migra por um ponto do domínio em determinada direção e com certa energia cinética, para uma função objetivo, por exemplo, a resposta de um detector. Para uma apropriada formulação, a função adjunta pode ser interpretada como proporcional à leitura de um determinado detector devido a uma fonte unitária de partículas neutras (Bell & Glasstone, 1970; Lewis & Miller, 1993; Prinja & Larsen, 2010). Como resultado da interpretação como função importância, a solução da equação adjunta de transporte é muito utilizada em problemas de blindagem e do tipo fonte-detector (Sjoden, 2002; Zhang et al., 2010; Peplow, 2012; Bellout et al., 2012). Neste

tipo de procedimento, aproveita-se o fato de que, se for desejado determinar a resposta de um determinado detector de nêutrons, não é necessária a realização de cálculos do fluxo neutrônico para cada fonte emissora de partículas. Apenas um cálculo da função importância é suficiente para determinar a resposta do detector para qualquer distribuição de fontes, desde que não se altere o tipo de detector, nem a sua posição (Lewis & Miller, 1993; Prinja & Larsen, 2010).

A precisão nas simulações é um aspecto fundamental neste tipo de problemas e geralmente são consumidos altos recursos computacionais. Neste trabalho são descritas a formulação e aplicação do método determinístico *spectral Green's function* adjunto com aproximação constante no nodo para os termos correspondentes às fugas transversais ($SGF^\dagger-CN$) em problemas adjuntos de transporte multigrupo de energia na formulação de ordenas discretas (S_N) em geometria bidimensional. Uma versão preliminar deste trabalho pode ser encontrada em (Curbelo et al., 2018).

2. EQUAÇÕES NODAIS ADJUNTAS S_N INTEGRADAS TRANSVERSALMENTE COM APROXIMAÇÃO CONSTANTE

Neste trabalho é considerado um domínio retangular $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq x \leq H_x; 0 \leq y \leq H_y\}$. O domínio é discretizado utilizando uma grade espacial retangular em D , composta pela união de $I \times J$ nodos $d_{i,j}$ de comprimento h_{xj} e altura h_{yi} . Os parâmetros materiais são considerados constantes no interior de cada nodo $d_{i,j}$.

O método descrito neste trabalho está baseado em integrações transversais das equações adjuntas S_N no interior de cada nodo de discretização espacial (Badruzzaman, 1990). Portanto, consideramos as equações adjuntas S_N multigrupo de energia com simetria azimutal e espalhamento isotrópico em meios não multiplicativos, para um nodo de discretização espacial arbitrário $d_{i,j}$

$$\begin{aligned} & -\mu_m \frac{\partial \psi_{mg}^\dagger(x, y)}{\partial x} - \eta_m \frac{\partial \psi_{mg}^\dagger(x, y)}{\partial y} + \sigma_{Tg}^{i,j} \psi_{mg}^\dagger(x, y) \\ & = \frac{1}{4} \sum_{g'=1}^G \sigma_{Sg \rightarrow g'}^{(0)i,j} \sum_{n=1}^M \psi_{ng'}^\dagger(x, y) \omega_n + Q_g^{\dagger i,j}, \end{aligned} \quad (1)$$

com $m = 1 : M$, $g = 1 : G$, $i = 1 : I$, $j = 1 : J$ e $(x, y) \in d_{i,j}$, onde são consideradas condições de contorno de fluxo adjunto emergente nulo que significa que a importância de uma partícula que abandona o sistema é igual a zero. Neste trabalho é utilizada a quadratura de simetria de nível ou quadratura LQ_N (*Level Symmetric Quadrature*) (Lewis & Miller, 1993). Define-se como quadratura angular o conjunto de valores $\{\mu_m, \eta_m, \omega_m, m = 1 : M\}$, onde ω_m é o peso da quadratura angular para a direção m e o par ordenado (μ_m, η_m) representa uma direção discreta. Na Eq. (1) definimos $\psi_{mg}^\dagger(x, y)$ como o fluxo angular adjunto para o grupo de energia g na direção (μ_m, η_m) . A denominada fonte adjunta Q_g^\dagger identifica-se numericamente igual à seção de choque macroscópica de absorção do detector no grupo de energia g em problemas como os tratados neste trabalho. A grandeza σ_{Tg} é seção de choque macroscópica total para o grupo de energia g e $\sigma_{Sg \rightarrow g'}^{(l)}$ representa l -ésima componente da seção de choque macroscópica de espalhamento diferencial do grupo de energia g para o grupo de energia g' .

Para obter as equações adjuntas S_N “unidimensionais” integradas transversalmente é definido o operador de integração transversal generalizado

$$L_u \equiv \frac{1}{h_{us}} \int_{u_{s-1/2}}^{u_{s+1/2}} (\cdot) du , \quad (2)$$

onde $u = x$ ou y , e $s = j$ ou i , respectivamente. Primeiramente são aplicados L_y e L_x (2) à Eq. (1) no interior de $d_{i,j}$ e são obtidas as equações nodais adjuntas S_N “unidimensionais” integradas transversalmente nas direções coordenadas y e x , respectivamente

$$\begin{aligned} & -\mu_m \frac{d\tilde{\psi}_{mg,i}^\dagger(x)}{dx} - \frac{\eta_m}{h_{yi}} \left[\psi_{mg}^\dagger(x, y_{i+1/2}) - \psi_{mg}^\dagger(x, y_{i-1/2}) \right] + \sigma_{Tg}^{i,j} \tilde{\psi}_{mg,i}^\dagger(x) \\ & = \frac{1}{4} \sum_{g'=1}^G \sigma_{Sg \rightarrow g'}^{(0)i,j} \sum_{n=1}^M \tilde{\psi}_{ng',i}^\dagger(x) \omega_n + Q_g^{\dagger i,j} \end{aligned} \quad (3)$$

e

$$\begin{aligned} & -\eta_m \frac{d\hat{\psi}_{mg,j}^\dagger(y)}{dy} - \frac{\mu_m}{h_{xj}} \left[\psi_{mg}^\dagger(x_{j+1/2}, y) - \psi_{mg}^\dagger(x_{j-1/2}, y) \right] + \sigma_{Tg}^{i,j} \hat{\psi}_{mg,j}^\dagger(y) \\ & = \frac{1}{4} \sum_{g'=1}^G \sigma_{Sg \rightarrow g'}^{(0)i,j} \sum_{n=1}^M \hat{\psi}_{ng',j}^\dagger(x) \omega_n + Q_g^{\dagger i,j} , \end{aligned} \quad (4)$$

com $m = 1 : M$, $g = 1 : G$, $i = 1 : I$, $j = 1 : J$ e $(x, y) \in d_{i,j}$, onde são definidos os fluxos angulares adjuntos médios em cada direção coordenada no nodo $d_{i,j}$

$$\tilde{\psi}_{mg,i}^\dagger(x) = \frac{1}{h_{yi}} \int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} \psi_{mg}^\dagger(x, y) dy \quad \text{e} \quad \hat{\psi}_{mg,j}^\dagger(y) = \frac{1}{h_{xj}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \psi_{mg}^\dagger(x, y) dx .$$

O primeiro termo do lado direito nas Eqs. (3) e (4), é conhecido como fonte de espalhamento e o segundo termo do lado esquerdo, como termo de fuga transversal (em analogia com o problema físico).

As Eqs. (3) e (4) representam um sistema de $2 \times M \times G$ equações diferenciais ordinárias em $6 \times M \times G$ incógnitas. Para resolver o sistema com uma única solução, algumas aproximações devem ser introduzidas. Os métodos espectralnodais tratam os termos de fonte de espalhamento analiticamente, aproximando apenas os termos de fuga transversal (Barros & Larsen, 1992; Domínguez & Barros, 2007; Curbelo et al., 2018). Neste trabalho as equações S_N integradas transversalmente, (3) e (4), no interior de um nodo de discretização espacial arbitrário $d_{i,j}$ são resolvidas numericamente aproximando apenas os termos de fuga transversal por uma constante. Isto é, aproximamos os fluxos angulares adjuntos nos lados do nodo pelos fluxos angulares adjuntos médios nos lados do nodo:

$$\psi_{mg}^\dagger(x, y_{i\pm 1/2}) \approx \tilde{\psi}_{mg,i\pm 1/2,j}^\dagger \quad \text{e} \quad \psi_{mg}^\dagger(x_{j\pm 1/2}, y) \approx \hat{\psi}_{mg,i,j\pm 1/2}^\dagger .$$

Devido a estas aproximações contantes, o método recebe o nome de SGF^\dagger com aproximação constante no nodo ($SGF^\dagger-CN$). Os termos de fonte de espalhamento são tratados de forma analítica utilizando o método SGF^\dagger (Curbelo et al., 2017). Portanto, as únicas aproximações que consideramos no método são essas aproximações constantes nos termos de fuga transversal.

A partir dessas aproximações para os termos de fuga transversal, as equações integradas transversalmente são reescritas na direção x como

$$-\mu_m \frac{d\tilde{\psi}_{mg,i}^\dagger(x)}{dx} + \sigma_{Tg}^{i,j} \tilde{\psi}_{mg,i}^\dagger(x) = \sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^M \kappa_{gg'}^{\dagger n} \tilde{\psi}_{ng',i}^\dagger(x) + Q_g^{\dagger i,j} + \hat{\tau}_{mg}^{\dagger i,j}, \quad (5)$$

onde são definidos o coeficiente de espalhamento

$$\kappa_{gg'}^{\dagger n} = \frac{\omega_n}{4} \sigma_{Sg \rightarrow g'}^{(0) i,j}$$

e o termo adjunto de fuga transversal

$$\hat{\tau}_{mg}^{\dagger i,j} = \frac{\eta_m}{h_{yi}} \left(\hat{\psi}_{mg,i+1/2,j}^\dagger - \hat{\psi}_{mg,i-1/2,j}^\dagger \right).$$

Um resultado análogo é obtido na direção y . Na sequência, descrevemos uma análise espectral para a Eq. (5) apenas na direção x , já que na direção y são obtidas equações similares.

A Eq. (5) forma um sistema de $M \times G$ equações diferenciais ordinárias no interior de cada nodo de discretização $d_{i,j}$ que resolvemos analiticamente utilizando uma análise espectral, similar ao caso unidimensional (Curbelo et al., 2017). A solução geral da Eq. (5) pode ser representada como

$$\tilde{\psi}_{mg,i}^\dagger(x) = \tilde{\psi}_{mg,i}^{\dagger P} + \tilde{\psi}_{mg,i}^{\dagger H}(x).$$

A grandeza $\tilde{\psi}_{mg,i}^{\dagger P}$ é a solução particular, enquanto $\tilde{\psi}_{mg,i}^{\dagger H}(x)$ é a componente homogênea da solução geral. Substituindo a grandeza espacialmente constante $\tilde{\psi}_{mg,i}^{\dagger P}$ na Eq. (5) obtem-se

$$\tilde{\psi}_{mg,i}^{\dagger P} = \Theta^{-1} \left[Q_g^{\dagger i,j} + \hat{\tau}_{mg}^{\dagger i,j} \right], \quad (6)$$

onde Θ^{-1} é a inversa da matriz cujos elementos são

$$\Theta_{gg'}^{mn} = \delta_{m,n} \delta_{g,g'} \sigma_{Tg}^{i,j} - \kappa_{gg'}^{\dagger n}, \quad m = 1 : M, \quad g = 1 : G, \quad n = 1 : M, \quad g' = 1 : G.$$

Para determinar a solução homogênea consideramos a expressão

$$\tilde{\psi}_{mg,i}^{\dagger H}(x) = a_{mg}^{\dagger}(\xi) e^{\frac{-(x - \lambda_j)}{\xi}}, \quad \lambda_j = \begin{cases} x_{j+1/2} & , \xi < 0 \\ x_{j-1/2} & , \xi > 0 \end{cases}. \quad (7)$$

Aqui é utilizada a estratégia do deslocamento na função exponencial da Eq. (7) proposta por de Abreu (2004) para problemas de transporte de radiação. Esta estratégia limita as $M \times G$ funções exponenciais da solução local no intervalo $(0,1]$ e evita erros de *overflow* na resolução do problema, devido à aritmética finita em cálculos computacionais. A estratégia do deslocamento foi usada no trabalho de Curbelo et al. (2018) para o tipo de problemas que são considerados neste trabalho.

Substituindo a Eq. (7) na equação homogênea correspondente à Eq. (5), i.e., $Q_g^{\dagger i,j} = 0$ e $\hat{\tau}_{mg}^{\dagger i,j} = 0$, obtem-se

$$\sum_{g'=1}^G \sum_{n=1}^M \left[-\delta_{m,n} \delta_{g,g'} \frac{\sigma_{Tg}^{i,j}}{\mu_m} + \frac{\kappa_{gg'}^{\dagger n}}{\mu_m} \right] a_{ng'}^{\dagger}(\xi) = \frac{1}{\xi} a_{mg}^{\dagger}(\xi). \quad (8)$$

Para $m = 1 : M$ e $g = 1 : G$, a Eq. (8) representa um problema de autovalores. Em consequência, para $x \in d_{i,j}$ obtemos um conjunto de $M \times G$ autofunções como as definidas na Eq. (7). Assim, a solução geral para a Eq. (5) no nodo $d_{i,j}$ aparece como

$$\tilde{\psi}_{mg}^\dagger(x) = \sum_{k=1}^{M \times G} \beta_k a_{mg}^\dagger(\xi_k) e^{-\frac{(x - \lambda_j)}{\xi_k}} + \tilde{\psi}_{mg,i}^{\dagger P}, \quad m = 1 : M, \quad g = 1 : G. \quad (9)$$

A grandeza $a_{mg}^\dagger(\xi_k)$ representa a componente número $(g - 1)M + m$ do autovetor correspondente ao autovalor ξ_k^{-1} ; β_k são constantes arbitrárias e $\tilde{\psi}_{mg,i}^{\dagger P}$ é calculada usando a Eq. (6).

Note-se que os autovalores ξ^{-1} podem aparecer em pares reais de sinais opostos ou em pares complexos conjugados. Neste trabalho, são considerados problemas de fonte fixa sem *upscattering* no problema físico, observando, em todos os testes realizados, que apenas foram obtidos autovalores e autovetores com componentes reais.

3. O MÉTODO $SGF^\dagger-CN$

Esta seção está dividida em duas subseções. Na Subseção 3.1 apresentamos as equações discretizadas do método $SGF^\dagger-CN$ e na Subseção 3.2 descrevemos o esquema iterativo de inversão nodal parcial NBI^\dagger para resolver iterativamente as equações discretizadas do método $SGF^\dagger-CN$ em geometria bidimensional utilizando as condições de contorno e de continuidade.

3.1 Equações nodais do método $SGF^\dagger-CN$

Integrando a Eq. (1) no interior de um nodo de discretização espacial arbitrário $d_{i,j}$ usando o operador

$$\frac{1}{h_{xj} h_{yi}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} (\cdot) dy dx,$$

são obtidas as equações adjuntas S_N discretizadas de balanço espacial

$$\begin{aligned} & -\frac{\mu_m}{h_{xj}} \left(\tilde{\psi}_{mg,i,j+1/2}^\dagger - \tilde{\psi}_{mg,i,j-1/2}^\dagger \right) - \frac{\eta_m}{h_{yi}} \left(\hat{\psi}_{mg,i+1/2,j}^\dagger - \hat{\psi}_{mg,i-1/2,j}^\dagger \right) + \sigma_{Tg}^{i,j} \bar{\psi}_{mg,i,j}^\dagger \\ & = \sum_{g''=1}^G \sum_{l=1}^M \kappa_{gg''}^{\dagger l} \bar{\psi}_{lg'',i,j}^\dagger + Q_g^{\dagger i,j}, \end{aligned} \quad (10)$$

onde é definido o fluxo angular adjunto médio no nodo $d_{i,j}$

$$\bar{\psi}_{mg,i,j}^\dagger = \frac{1}{h_{xi} h_{yj}} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \int_{y_{i-1/2}}^{y_{i+1/2}} \psi_{mg}^\dagger(x, y) dy dx. \quad (11)$$

A Eq. (10), no interior de um nodo espacial arbitrário $d_{i,j}$, representa um sistema de $M \times G$ equações lineares em $3 \times M \times G$ incógnitas. Para garantir a unicidade da solução deste sistema subdeterminado, é preciso utilizar $2 \times M \times G$ equações auxiliares. No método $SGF^\dagger-CN$ são definidas equações auxiliares que têm a forma

$$\bar{\psi}_{mg,i,j}^\dagger = \sum_{g'=1}^G \sum_{\mu_n < 0} \theta_{ng' \rightarrow mg}^{X i,j} \tilde{\psi}_{ng',i,j-1/2}^\dagger + \sum_{g'=1}^G \sum_{\mu_n > 0} \theta_{ng' \rightarrow mg}^{X i,j} \tilde{\psi}_{ng',i,j+1/2}^\dagger + \hat{G}_{mg,i,j} \quad (12)$$

onde $\widehat{G}_{mg, i, j}$ são funções da fonte interior adjunta e do termo de fuga transversal, determinadas de forma que a solução particular seja preservada automaticamente e os parâmetros $\theta_{ng' \rightarrow mg}^{X i, j}$ são determinados de tal forma a preservarem as componentes homogêneas das soluções gerais locais (Curbelo et al., 2018).

As equações de balanço espacial (10) combinadas com as equações auxiliares (12) e as correspondentes para a direção y , conjuntamente com as condições de contorno apropriadas, formam as equações constitutivas do método $SGF^\dagger-CN$ para o caso bidimensional. A solução destas equações é obtida via um método iterativo. Neste trabalho é utilizado o esquema NBI^\dagger parcial, que é descrito na próxima subseção.

3.2 Esquema iterativo NBI^\dagger parcial

Para gerar soluções numéricas para as equações discretizadas do método $SGF^\dagger-CN$, é usado o esquema iterativo NBI^\dagger parcial. Este esquema utiliza as mais recentes estimativas para todos os fluxos angulares adjuntos nas direções emergentes de um dado nodo espacial $d_{i,j}$ (setas contínuas na Figura 1), para resolver o problema adjunto resultante no nodo e determinar os fluxos angulares adjuntos nas direções incidentes no nodo e no sentido oposto à varredura de transporte (setas tracejadas na Figura 1), os quais constituem os fluxos angulares adjuntos nas direções emergentes dos nodos adjacentes no sentido da varredura. Cada seta na Figura 1 representa $N(N + 2)/8$ direções em cada quadrante para a direção de varredura ①–③ e aparecem representados dois grupos de energia.

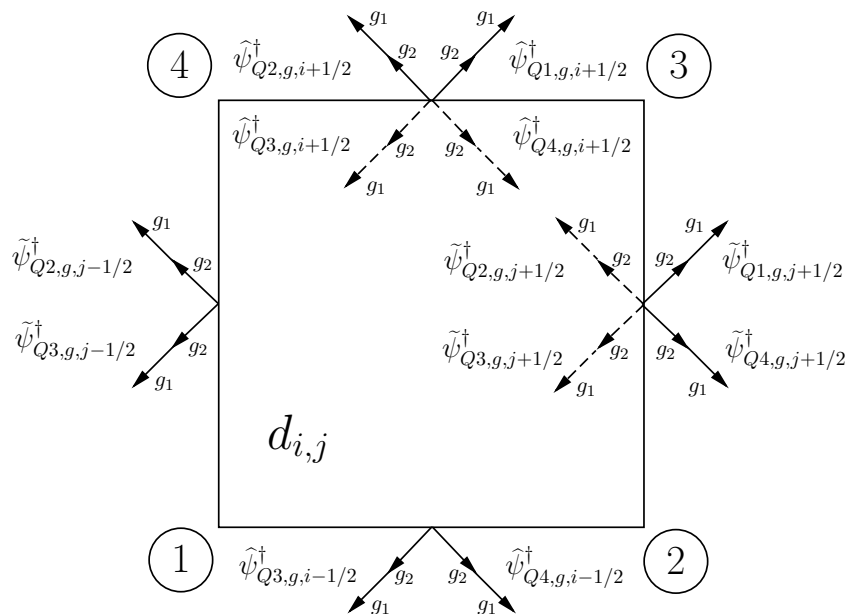


Figura 1- Esquema de varredura para o algoritmo NBI^\dagger parcial na direção ①–③ ($G = 2$).

O algoritmo é baseado em realizar iterações sobre os fluxos angulares adjuntos nos contornos dos nodos nas quatro direções de varredura: ①–③, ③–①, ②–④ e ④–②. Assim, substituímos as equações auxiliares (12) e as correspondentes para a direção y na equação de balanço (10) para calcular o fluxo angular adjunto de interesse.

Na próxima seção é resolvido um problema–modelo visando a ilustrar a precisão do método $SGF^\dagger-CN$, usando o esquema iterativo NBI^\dagger parcial, e a eficiência do uso da técnica adjunta nos problemas de fonte–detector.

4. RESULTADOS NUMÉRICOS

Nesta seção é considerado um problema–modelo que é adaptado por Menezes et al (2013) dos trabalhos de Azmy (1988) e Domínguez & Barros (2007). Este problema caracteriza um problema de perfilagem de poços de petróleo onde uma sonda de aço com três fontes de nêutrons e um detector é introduzida no subsolo com o objetivo de realizar análises geofísicas. Neste problema são consideradas condições de contorno reflexiva no contorno inferior do domínio e condições de contorno de tipo vácuo para os demais contornos; também é considerado espalhamento isotrópico. O critério de parada do processo iterativo é considerado tal que a norma máxima discreta do desvio relativo entre duas estimativas consecutivas do fluxo escalar médio (físico e adjunto) nos lados do nodo de discretização espacial não ultrapassasse o valor 10^{-6} .

Neste trabalho a leitura de um detector devida a fontes interiores é determinada usando uma técnica adjunta. Para resolver o problema adjunto S_N estabelecemos a fonte adjunta numericamente igual à seção de choque macroscópica de absorção do detector, i.e., $Q_g^\dagger = \sigma_{Ag}$, e o problema adjunto é resolvido utilizando o método oferecido $SGF^\dagger-CN$. Assumindo condições de contorno do tipo vácuo para o problema físico e de fluxo adjunto emergente nulo para o problema adjunto, a leitura do detector é obtida por

$$R^\dagger = \langle \psi^\dagger, Q \rangle, \quad (13)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa a integração em todas as variáveis independentes no interior dos domínios das mesmas e Q são as fontes de partículas no interior do domínio. Por outro lado, a densidade de taxa de absorção gerada pelo problema físico é $R = \langle \psi, \sigma_A \rangle$, onde ψ é o fluxo angular físico e σ_A é a seção de choque macroscópica de absorção na região.

A geometria do problema é ilustrada na Figura 2 e as propriedades físicas dos materiais aparecem listadas na Tabela 1. Os valores das constantes que definem as seções de choque macroscópicas para o primeiro grupo de energia ($g = 1$) são mantidos idênticos aos utilizados por Azmy (1988). Para o segundo grupo de energia ($g = 2$) bem como para as transferências intergrupo da seção de choque macroscópica de espalhamento, os dados são arbitrados já que as referências consultadas não especificaram os valores utilizados (Badruzzaman, 1991; Azmy, 1988).

Tabela 1- Seções de choque macroscópicas (cm^{-1}) para o Problema–Modelo N° 1.

	Rocha		Água		Aço	
	$g = 1$	$g = 2$	$g = 1$	$g = 2$	$g = 1$	$g = 2$
σ_{Tg}	0,330263	0,240845	0,694676	0,555741	0,499122	0,399298
σ_{Ag}^a	0,008544	0,005690	0,056607	0,037700	0,002902	0,001933
	$\sigma_{Sg' \rightarrow g}^{(0)}$					
$g' = 1$	0,314419	0,0073	0,634833	0,003236	0,49446	0,00176
$g' = 2$	0	0,235155	0	0,518041	0	0,39736

$$^a \sigma_{Ag} = \sigma_{Tg} - \sum_{g'=1}^G \sigma_{Sg \rightarrow g'}^{(0)}, \sigma_{Sg' \rightarrow g}^{(0)} = 0, \forall g' > g \text{ (sem upscattering no problema físico).}$$

É considerado o experimento numérico de determinar a leitura do detector D_g devida às fontes $Q_g^1 = Q_g^2 = Q_g^3 = \delta_{1,g}$ de forma independente, visando a ilustrar a eficiência do uso da técnica adjunta em cálculos de transporte do tipo fonte–detector. Para resolver o problema

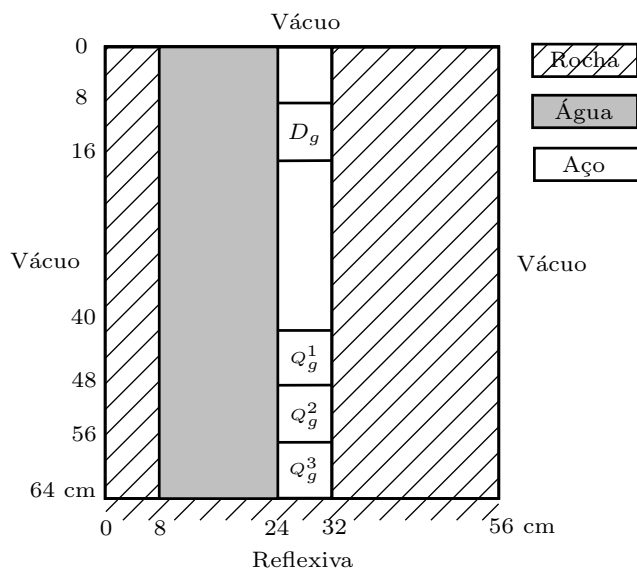


Figura 2- Geometria para o Problema-Modelo. Largura = 56 cm e altura = 64 cm.

adjunto é utilizado o presente método $SGF^\dagger-CN$ com grades de discretização espacial de 56×64 e 112×128 nodos (malhas mais finas utilizadas no trabalho de Domínguez & Barros (2007)) com um conjunto de quadraturas angulares de simetria de nível S_{16} (Lewis & Miller, 1993). Para tanto, a fonte adjunta é considerada numericamente igual à seção de choque macroscópica de absorção do detector, i.e., $Q_g^\dagger = \sigma_{Ag}$. Assim, é possível obter o mapa de distribuição da função importância para o detector considerado. A Figura 3 ilustra a distribuição da função importância nos dois grupos de energia considerados para uma fonte adjunta na posição do detector D_g . Claramente, os maiores valores de importância aparecem nas proximidades da região D_g , ou seja, os nêutrons viajando próximos ao detector serão mais importantes para a leitura total.

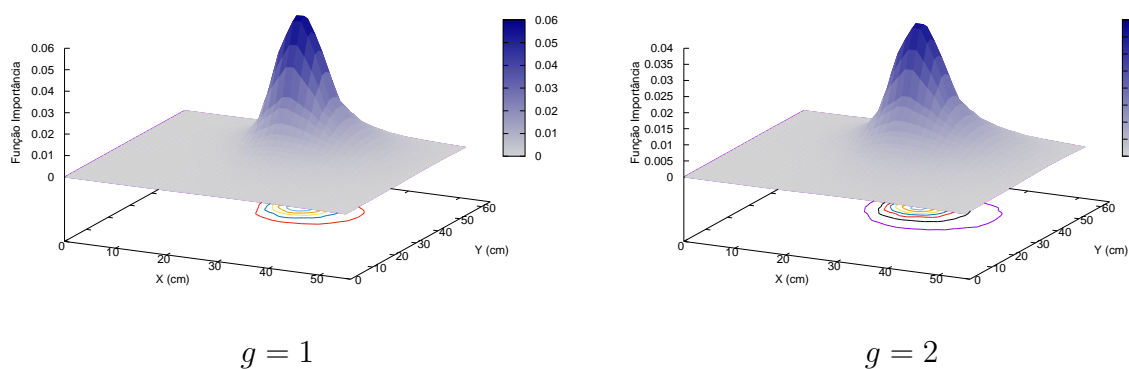


Figura 3- Distribuição da função importância para ambos os grupos $g = 1$ e $g = 2$ no Problema-Modelo (56×64 nodos).

É oportuno ressaltar que o uso da técnica adjunta para calcular a leitura do detector devida a várias fontes é conveniente, já que é possível o uso da mesma solução adjunta para vários e distintos valores de intensidade e/ou localização das fontes interiores e/ou tipo de condição de contorno, desde que não seja modificada a posição ou o valor da fonte adjunta. Neste problema-modelo o código $SGF^\dagger-CN$ é executado apenas uma vez para cada grupo de energia e é utilizada

a solução adjunta numérica na Eq. (13) para avaliar a leitura do detector para cada experimento. Isto é possível já que o detector não foi modificado nem se mudou a sua localização. Por outro lado, se é resolvido o problema S_N físico, deve ser executado o código $SFG-CN$ (Barros & Larsen, 1992) três vezes, uma para cada localização da fonte unitária na Figura 2, além do fato de que a leitura total é apenas a soma das três leituras anteriores. A Tabela 2 lista os resultados para a leitura do detector D_g neste experimento numérico resolvendo ambos os problemas físico e adjunto. É possível observar que os resultados são muito precisos em relação aos cálculos físicos e coincidem até, pelo menos, a quinta casa decimal.

Tabela 2- Leitura dos detectores D_1 e D_2 no Problema-Modelo Nº 1 (S_{16}).

56×64^a	Fontes	D_1	D_2
R^b	Q_g^1	$1,88116 \times 10^{-2}$	$1,85422 \times 10^{-2}$
	Q_g^2	$5,82226 \times 10^{-3}$	$9,83859 \times 10^{-3}$
	Q_g^3	$2,30375 \times 10^{-3}$	$6,34808 \times 10^{-3}$
$R^{\dagger c}$	Q_g^1	$1,88116 \times 10^{-2}$	$1,85422 \times 10^{-2}$
	Q_g^2	$5,82226 \times 10^{-3}$	$9,83860 \times 10^{-3}$
	Q_g^3	$2,30375 \times 10^{-3}$	$6,34807 \times 10^{-3}$
112×128	Fontes	D_1	D_2
R	Q_g^1	$1,88982 \times 10^{-2}$	$1,85626 \times 10^{-2}$
	Q_g^2	$5,84979 \times 10^{-3}$	$9,85276 \times 10^{-3}$
	Q_g^3	$2,31519 \times 10^{-3}$	$6,35925 \times 10^{-3}$
R^{\dagger}	Q_g^1	$1,88982 \times 10^{-2}$	$1,85627 \times 10^{-2}$
	Q_g^2	$5,84979 \times 10^{-3}$	$9,85277 \times 10^{-3}$
	Q_g^3	$2,31519 \times 10^{-3}$	$6,35925 \times 10^{-3}$

^a Número de nodos na direção $x \times$ número de nodos na direção y .

^b Densidade da taxa de absorção por unidade de altura ($cm^{-1} s^{-1}$).

^c Leitura do detector ($cm^{-1} s^{-1}$).

5. CONCLUSÕES

Neste trabalho o método de malha grossa $SGF^{\dagger}-CN$ é estendido a problemas em geometria bidimensional retangular multigrupo de energia considerando espalhamento isotrópico. Neste método, a única aproximação realizada é nos termos correspondentes às fugas transversais nas equações adjuntas S_N integradas transversalmente. Os termos envolvendo os eventos de espalhamento e a fonte adjunta são tratados analiticamente.

Uma desvantagem do método $SGF^{\dagger}-CN$, é que requer mais armazenamento que os métodos de discretização convencionais como o *Diamond Difference*. Isto é devido ao fato que o presente método $SGF^{\dagger}-CN$ requer o armazenamento de tantas matrizes com elementos $\theta_{ng' \rightarrow mg}^{X i, j}$, e as correspondentes para a direção y , quantas forem as regiões do domínio, além do fato de o esquema iterativo NBI^{\dagger} parcial requerer o armazenamento de todos os fluxos angulares adjuntos nos lados dos nodos de discretização espacial. Entretanto, este maior consumo de memória pode ser compensado por seu alto desempenho em cálculos de malha grossa, já que são obtidos resultados precisos com grades espaciais com espessuras bem grossas.

A partir do problema-modelo resolvido é possível observar que os resultados são muito precisos em relação aos cálculos físicos. De acordo com as distribuições da função importância

dos nêutrons para uma fonte adjunta interior, os valores mais altos de importância aparecem em posições próximas às fontes adjuntas, como esperado. O método espectralnodal $SGF^\dagger-CN$ apresenta, ademais, uma baixa sensibilidade à grade de discretização.

Como continuação deste trabalho, propõe-se a utilização de um esquema de reconstrução intra-nodal da solução numérica em problemas S_N adjuntos bidimensionais para obter perfis mais detalhados em cálculos com grades espaciais largas. A técnica adjunta também poderia ser aplicada na resolução de problemas inversos em cálculos de blindagem e problemas de fonte-detector. Finalmente, propõe-se a extensão do método $SGF^\dagger-CN$ a problemas S_N adjuntos em geometria tridimensional.

Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro fornecido pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ).

REFERÊNCIAS

- Azmy, Y. Y. (1988), Comparison of three approximations to the linear-linear nodal transport method in weighted diamond-difference forms. *Nuclear Science and Engineering*, 100, 190–200.
- Badruzzaman, A. (1990), “Nodal methods in transport theory”, in *Advances in Nuclear Science and Technology*, Plenum Press, New York, USA.
- Badruzzaman, A. (1991), Computational methods in nuclear geophysics. *Progress in Nuclear Energy*, 25, 265–290.
- Barros, R. C. & Larsen, E. W. (1992), A spectral nodal method for one-group X, Y -geometry discrete ordinates problems. *Nuclear Science and Engineering*, 11, 34–45.
- Bellout, M. C.; Echeverría, D.; Durlinsky, L. J.; Foss, B. & Kleppe, J. (2012), Joint optimization of oil well placement and controls. *Computational Geosciences*, 16, 1061–1079.
- Bell, G. I. & Glasstone, S. (1970), “*Nuclear Reactor Theory*”, Van Nostrand Reinhold, New York, USA.
- Curbelo, J. P.; da Silva, O. P.; García, C. R. & Barros, R. C. (2017), “Generalization of Spectral Green’s Function nodal method for slab-geometry fixed-source adjoint transport problems in S_N formulation”, *International Nuclear Atlantic Conference- INAC 2017*, Belo Horizonte, Brazil, ISBN: 978-85-99141-07-6.
- Curbelo, J. P.; da Silva, O. P. & Barros, R. C. (2018), Application of an adjoint technique to one-speed X, Y -geometry source-detector transport problems in the discrete ordinates formulation using a spectral nodal method. *Progress in Nuclear Energy*, 108, 445–453.
- de Abreu, M. P. (2004), Mixed singular-regular boundary conditions in multislabs radiation transport. *Journal of Computational Physics*, 197, 167–185.
- Domínguez, Dany. S. & Barros, Ricardo. C. (2007), The spectral Green’s function linear-nodal method for one-speed X, Y -geometry discrete ordinates deep penetration problems. *Annals of Nuclear Energy*, 34, 958–966.
- Lewis, E. E. & Miller, W. F. (1993), “*Computational methods of neutron transport*”, American Nuclear Society, Illinois, USA.
- Menezes, W. A.; Alves Filho, H.; Barros, R.C.; Moraes, C. S. & Domínguez, D. S. (2013), Analytical spatial reconstruction scheme for the coarse-mesh solutions generated by the constant spectral nodal method for monoenergetic discrete ordinates transport calculations in X, Y -geometry fission-chain reacting systems. *Annals of Nuclear Energy*, 53, 274–279.
- Peplow, D. E. (2012), Comparison of hybrid methods for global variance reduction in shielding calculations. *Transactions of the American Nuclear Society*, 107, 512–515.
- Prinja, A. K. & Larsen, E. W. (2010), “General Principles of Neutron Transport”, in *Handbook of Nuclear Engineering*, Cacuci, D. G. (ed.), Springer Science+Business Media, New York, USA.
- Sjoden, G. E. (2002), Deterministic adjoint transport applications for He-3 neutron detector design. *Annals of Nuclear Energy*, 29, 1055–1071.
- Zhang, K.; Li, G.; Reynolds, A.C.; Yao, J. & Zhang, L. (2010), Optimal well placement using an adjoint gradient. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 73, 220–226.

Application of an adjoint technique to multigroup X, Y -geometry source–detector problems in the discrete ordinates formulation using a spectral nodal method

Abstract.

Presented here is an application of an adjoint technique for solving source–detector discrete ordinates (S_N) transport problems by using a spectral nodal method. The coarse–mesh adjoint spectral Green’s function–constant nodal (SGF^\dagger –CN) method is extended to solve multigroup X, Y -geometry adjoint S_N transport problems, considering isotropic scattering in non–multiplying media. The discretized SGF^\dagger –CN equations are solved by using the adjoint partial one–node block inversion (NBI^\dagger) iterative scheme. The partial adjoint NBI scheme performs S_N transport sweeps from the four corners of the rectangular domain. One uses the most recent estimates for the adjoint node–edge average fluxes in the outgoing directions, to solve the resulting adjoint S_N problem in that node for all the incoming adjoint node–edge average fluxes, which constitute the outgoing adjoint node–edge average fluxes for the adjacent nodes in the direction of the transport sweep. Numerical results are given to illustrate the method’s accuracy in coarse–mesh adjoint S_N calculations and some advantages of using the adjoint technique in source–detector problems.

Keywords: *Adjoint transport problem, Discrete ordinates adjoint equations, Spectral nodal methods, Source–detector problems*