

08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

MÉTODO FREDHOLM PARA FUNÇÃO DE ONDA QUÂNTICA DE PODOLSKY

Pedro Henrique Giroto – phsgiroto@uesc.br

Jorge Henrique Sales – jhosales@uesc.br

Universidade Estadual de Santa Cruz, DCET-PPGMC – Ilhéus, BA, Brazil

Resumo. Neste artigo é usado o método de Fredholm na equação integral de Schrödinger na investigação do efeito de espalhamento próximo do centro do mesmo entre uma função de onda quântica estacionária e um potencial eletrostático. Dois potenciais são estudados um coulombiano e outro de Podolsky. O resultado mostra a importância da proposta de Podolsky para regularização do efeito próximo ao centro espalhador na função de onda quântica. Sendo que o potencial coulombiano apresenta forte variação na amplitude da onda após o espalhamento. No caso do potencial de Podolsky isso é corrigido com adoção de uma constante que remove essa forte variação.

Palavra-Chave: Fredholm, Função de onda, Podolsky

Abstract. This paper shows how to use the Fredholm method in Schrödinger's integral equation in the investigation of the scattering effect near its center between a stationary quantum wave function and an electrostatic potential. Two potentials are studied one coulombiano and one of Podolsky. The result shows the importance of the proposal of Podolsky to regularize the effect near the scattering center in the quantum wave function. Being that the coulombian potential presents strong variation in the amplitude of the wave after the scattering. In the case of Podolsky's potential this is corrected by adopting a constant that removes this strong variation.

Keywords: Fredholm, Wave function, Podolsky

1. INTRODUÇÃO

A quebra espontânea da simetria quiral tem um significado fundamental na compreensão da natureza não perturbativa da dinâmica dos hádrons (Nguyen, 2011). Tem sido argumentado que a simetria pode ser restaurada em temperatura suficientemente alta. Essa quebra de simetria em torno do centro da interação ($x = 0$), ou centro espalhador é pouco investigada. Na literatura é conhecida como “End Point”, onde diversos trabalhos procuram descrever o comportamento da energia nesse centro espalhador (Nguyen, 2011).

O primeiro vértice ou um ponto central para espalhar uma onda quântica é dada por interação colombiana com um potencial eletrostático que varia com o inverso da distância

$$V = \frac{1}{4\pi} \frac{Q^2}{r} \quad (1)$$

onde Q é a carga centra que espalha a onda e r a distância do centro a qualquer do espaço. Esse potencial mostra que para ponto na origem do sistema de coordenadas $r = 0$ implica em uma singularidade para a energia potencial. Como consequência a solução para a função de onda estacionária da equação de Schrödinger possui uma singularidade nesse ponto, neste artigo é visto com mais detalhe esse assunto.

O problema tem origem na teoria electromagnetica de Maxwell que tem uma dependência r^{-1} no potencial eletrostático de Coulomb para uma carga pontual. Assim, tem se uma divergência tanto na energia como no pontecial eletrostático (Sakurai, 2013). Uma solução para este tipo de problema foi proposta por Podolsky e Schwed em 1948 (Podolsky & Schwed, 1948), e consiste em uma generalização da teoria do Eletromagnetismo em que é adicionado um termo de segunda ordem nas derivada do campo eletromagnético A^μ , onde $\mu = 0,1,2,3$ são índice do espaço de Minkowski. Desta forma, a teoria do temos para essa teoria a lagrangeana de Podolsky

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{a^2}{2} \partial_\nu F^{\mu\nu} \partial^\alpha F_{\mu\alpha} \quad (2)$$

onde $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ e “ a ” é uma constante com dimensão de comprimento. Esta Langrageana gera uma teoria de campo linear, que se reduz à teoria de Maxwell quando $a = 0$. Trata-se evidentemente de uma teoria de ordem mais alta já que as equações de movimento derivadas de (2) contém derivadas quárticas do potencial vetor. Tal como a teoria de Maxwell, a teoria de Podolsky apresenta também energia positivo definida no caso eletrostático que, no entanto, é finita para uma carga pontual. Este último resultado mostra claramente que a força entre duas cargas pontuais não é mais coloumbiana, ponto que merece ser analisado mais de perto. Com essa teoria de Podolsky é obtido o potencial eletrostático generalizado, que assume então a forma

$$V(r) = \frac{Q^2}{4\pi} \cdot \frac{1-e^{-ra}}{r} \quad (3)$$

onde Q é a carga que gera o campo eletrostático e a é a constante de Podolsky. O potencia é do tipo Yukawa, tem as seguintes propriedades: tem um valor finito na origem e converge para o potencial de Coulomb para $r \gg a$, é do tipo assintótico:

$$V(r) = \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} V(r) = \frac{aQ^2}{4\pi} \\ r \gg a, V(r) = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{Q^2}{r} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Neste trabalho é mostrado como uma função de onda quântica estacionária, com potencial de Podolsky, não possui divergência para valores de “ a ” diferente de zero. O método usado é a solução da equação integral via Fredholm para a função de onda espalhada por um potencial do tipo colombiano (1) e de Podolsky (3).

2. METODOLOGIA

Equação integral ocorre em uma variedade de aplicações, muitas vezes sendo obtida de uma equação diferencial. O motivo de fazer isso é que a solução pode ficar mais fácil de se obter ou permite provar resultados fundamentais na existência e na singularidade da solução. Portanto, o método usado são as soluções via Fredholm com kernéis arbitrários.

2.1 Kernéis arbitrários

Seja a equação de Fredholm de segunda espécie:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (5)$$

onde $K(x, t)$ e $f(x)$ são funções conhecidas para $a \leq x \leq b$ e $a \leq t \leq b$. Essa equação foi resolvida por Fredholm, em 1900, usando o artidício de substituir a integral indicada em (5) pela soma correspondente de Riemann.

Dividamos o intervalor (a, b) em n intervalor iguais (Krasnov, 1981):

$$\frac{b-a}{n} = \Delta x = \Delta t \quad (6)$$

agora, vamos introduzir as seguinte notações:

$$\begin{aligned} x_h(t_h) &= a + h\Delta x(\Delta t) \\ f_i &= f(x_i) \\ u_i &= u(x_i(t_i)) \\ K_{pq} &= K(x_p, t_q) \end{aligned}$$

onde

$$i, p, q = 1, 2, 3, \dots, n$$

desse modo, substituindo a integral de (5) por um somatório, virá:

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{q=1}^n K(x, t_q)u_q \Delta t \quad (7)$$

substituindo na equação acima a variável x por x_p , obtém-se um sistema de n equações lineares do primeiro grau das funções desconhecidas u_1, u_2, \dots, u_n . Portanto

$$u_p = f_p + \lambda \sum_{q=1}^n K_{pq}u_q \Delta t, \quad p = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

para obtermos a solução do sistema dado pela Eq. (8), façamos:

$$u_p = \sum_{q=1}^n \delta_{pq}u_q \quad (9)$$

onde δ_{pq} é o delta de Kronecker que, levada na Eq. (8), dará:

$$\sum_{q=1}^n [\delta_{pq} - \lambda K_{pq} \Delta t] u_q = f_p, \quad p = 1, 2, \dots, n \quad (10)$$

usando-se a regra de Cramer (Krasnov, 1981) para resolver esse sistema, teremos:

$$u_q = \frac{\Delta_{nq}(\lambda)}{\Delta_n(\lambda)} \quad (11)$$

onde $\Delta_n(\lambda)$ é o determinante dos coeficientes das variáveis dependentes e $\Delta_{nq}(\lambda)$ é o determinante obtido a partir desde, no qual se substitui a coluna dos coeficientes de u_q pela coluna dos termos independentes f_p .

Analisemos cada um desses determinantes. O determinante $\Delta_n(\lambda)$ é dado por:

$$\Delta_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda K_{11} \Delta t & -\lambda K_{12} \Delta t & \cdots & -\lambda K_{1n} \Delta t \\ -\lambda K_{21} \Delta t & 1 - \lambda K_{22} \Delta t & \cdots & -\lambda K_{2n} \Delta t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\lambda K_{n1} \Delta t & -\lambda K_{n2} \Delta t & \cdots & 1 - \lambda K_{nn} \Delta t \end{vmatrix} \quad (12)$$

aplicando-se à expressão (12) a fórmula de decomposição de um determinante (Smirnov, 1975) virá:

$$\begin{aligned} \Delta_n(\lambda) = & 1 - \frac{\lambda}{1!} \sum_{p_1=1}^n K_{p_1 p_1} \Delta t + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{p_1=1}^n \sum_{p_2=1}^n \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} \\ K_{p_2 p_1} & K_{p_2 p_2} \end{vmatrix} (\Delta t)^2 + \cdots \\ & + (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \sum_{p_1=1}^n \sum_{p_2=1}^n \cdots \sum_{p_n=1}^n \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} & \cdots & K_{p_1 p_n} \\ K_{p_2 p_1} & K_{p_2 p_2} & \cdots & K_{p_2 p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{p_n p_1} & K_{p_n p_2} & \cdots & K_{p_n p_n} \end{vmatrix} (\Delta t)^n \end{aligned} \quad (13)$$

antes de prosseguirmos, vamos introduzir a seguinte notação (Bassalo, 2012):

$$K \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(x_1, t_1) & K(x_1, t_2) & \cdots & K(x_1, t_n) \\ K(x_2, t_1) & K(x_2, t_2) & \cdots & K(x_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ K(x_n, t_1) & K(x_n, t_2) & \cdots & K(x_n, t_n) \end{vmatrix} \quad (14)$$

agora consideremos sucessivamente os termos do segundo membro da Eq. (13). Ora, os somatórios de Riemann dessa equação podem ser substituídos por integrais no limite $n \rightarrow \infty$. Então, teremos, respectivamente:

$$\sum_{p_1=1}^n K_{p_1 p_1} \Delta t = \sum_{i=1}^n K(t_1, t_1) \Delta t = \int_a^b K(t_1, t_1) dt \quad (15)$$

para o terceiro termo de (13)

$$\sum_{p_1=1}^n \sum_{p_2=1}^n \begin{vmatrix} K_{p_1 p_1} & K_{p_1 p_2} \\ K_{p_2 p_1} & K_{p_2 p_2} \end{vmatrix} (\Delta t)^2 = \int_a^b \int_a^b \begin{vmatrix} K(t_1, t_1) & K(t_1, t_2) \\ K(t_2, t_1) & K(t_2, t_2) \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \quad (16)$$

e assim sucessivamente. Desse modo, a Equação (13) ficará:

$$\Delta_n(\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n \quad (17)$$

onde:

$$d_n = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K \begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \cdots dt_n \quad (18)$$

com $K \begin{pmatrix} t_i \\ t_1 \end{pmatrix}$ dado pela Eq. (14).

O valor do determinante $\Delta_{nq}(\lambda)$ da Eq. (11) foi obtido por Fredholm (1900), com um cálculo que envolve muita manipulação algébrica, razão pela qual apresentaremos apenas o resultado. Assim:

$$\Delta_{nq}(\lambda) \equiv \Delta(x, t; \lambda) = K(x, t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} d_n(x, t) \quad (19)$$

onde:

$$d_n(x, t) = \int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b K \begin{pmatrix} x & t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ t & t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix} dt_1 dt_2 \cdots dt_n \quad (20)$$

com $K \begin{pmatrix} x & t_i \\ t & t_i \end{pmatrix}$ dado pela Eq. (14).

Desse modo, segundo Fredholm, a solução da Eq. (5) será dada por:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b R(x, t; \lambda) f(t) dt \quad (21)$$

onde a função $R(x, t; \lambda)$ é chamada de Kernel resolvente de Fredholm e definida por:

$$R(x, t; \lambda) = \frac{\Delta(x, t; \lambda)}{\Delta(\lambda)} \quad (22)$$

onde $\Delta(x, t; \lambda)$ e $\Delta(\lambda)$ são dados, respectivamente, pelas Eq. (17) e (18) e Eq. (19) e (20).

3. EQUAÇÃO INTEGRAL PARA AUTOFUNÇÃO DE ONDA

Trataremos apenas o caso de *espalhamento elástico* de partículas cujos estados internos não mudam (Sakurai, 2013).

3.1 Equação integral de Schrödinger

Como as partículas espalhadas se movem como partículas livres a grande distância do centro espalhador, a energia de seu movimento relativo é sempre positiva e não quantizada. Portanto, na formulação do problema do espalhamento de uma partícula de massa m com energia relativa positiva E e em um potencial $V(\vec{r})$, reduz-se a resolver a equação de Schrödinger (Sakurai, 2013)

$$H\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (24)$$

Sendo:

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(\vec{r}) \quad (25)$$

então a Eq. (24) ficará:

$$(\Delta + k^2)\psi(\vec{r}) = \frac{2mV(\vec{r})}{\hbar^2}\psi(\vec{r}) \quad (28)$$

onde:

$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (29)$$

e:

$$V(\vec{r}) \neq 0, \quad |\vec{r}| \leq d \quad (30)$$

Para fora da *região de espalhamento* ($|\vec{r}| > d$), a Eq. (28) ficará:

$$(\Delta + k^2)\varphi(\vec{r}) = 0 \quad (31)$$

cuja solução vale (Sakurai, 2013):

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (\vec{p} = \hbar\vec{k}) \quad (32)$$

Agora, vamos resolver a Eq. (28) para a região de espalhamento. Para isso, usaremos a técnica da função de Green (Bassalo, 2012). Assim, sendo a função de Green para a Eq. (28) dada por:

$$(\Delta + k^2) G(\vec{r}, \vec{r}') = \delta(r - r'), \quad (33)$$

a solução daquela equação será:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{2m}{\hbar^2} \int G(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3\vec{r}'. \quad (34)$$

Desse modo, a solução da equação de Schrödinger Eq. (28) para o espaço todo será:

$$\psi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) + \frac{2m}{\hbar^2} \int G(\vec{r}, \vec{r}') V(\vec{r}') \psi(\vec{r}') d^3\vec{r}'. \quad (35)$$

Sendo que a função Green é dada por:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{e^{i\vec{K}\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}}{k^2 - K^2} d^3K. \quad (37)$$

Para fazermos a integral indicada, inicialmente vamos tomar o vetor $(\vec{r} - \vec{r}') = \rho$, isto é, na direção do eixo polar do espaço dos K . Então:

$$\vec{K} \cdot (\vec{r} - \vec{r}') = K\rho \cos(\theta). \quad (38)$$

Por outro lado, sendo:

$$d^3K = K^2 dK \text{sen}(\theta) d\theta d\phi, \quad (39)$$

a Eq. (37), ficará:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{e^{iK\rho \cos(\theta)}}{k^2 - K^2} K^2 dk \text{sen}(\theta) d\theta d\phi. \quad (40)$$

Agora, integrando-se em θ e ϕ , teremos:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{2\pi^2 \rho} \int_0^\infty \frac{\text{sen}(K\rho) K dK}{k^2 - K^2} \quad (41)$$

Como o integrando da Eq. (41) é uma função par, então:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{1}{4\pi^2 \rho} \int_{-\infty}^\infty \frac{K \text{sen}(K\rho) dK}{k^2 - K^2} \quad (42)$$

Usando-se a fórmula de Euler ($e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \text{sen}(\alpha)$) e fazendo-se $K\rho = N$, a Eq. (42) tornar-se-á:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{1}{8\pi^2 \rho i} \left[\int_{-\infty}^\infty \frac{N e^{iN} dN}{N^2 - \eta^2} - \int_{-\infty}^\infty \frac{N e^{-iN} dN}{N^2 - \eta^2} \right], \quad (43)$$

onde $\eta = k\rho$.

Para fazermos as integrais indicadas na Eq.(43), vamos usar o método dos resíduos (Bassalo, 2012). As contribuições a essas integrais vêm dos zeros $q = \pm\eta$. A primeira integral é calculada usando o sentido antihorário para uma curva que contorna o polo $+\eta$. Portanto, teremos:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{N e^{iN} dN}{(N+\eta)(N-\eta)} = 2\pi i \text{Res}|_{N=\eta} = \pi i e^{i\eta}. \quad (44)$$

Analogamente, a segunda integral da Eq. (43) é calculada usando-se o contorno no sentido horário da curva em torno do polo $-\eta$. Portanto, teremos:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{N e^{-iN} dN}{(N+\eta)(N-\eta)} = (-2\pi i) \text{Res}|_{N=-\eta} = -\pi i e^{-i\eta}. \quad (45)$$

Levando-se as Eq. (44) e (45) à Eq. (43), a função de Green procurada, será:

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = -\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \quad (46)$$

A escolha de outro contorno diferente dos usados aqui, levaria a um termo do tipo $e^{-i\eta}$ em adição ou em subtração ao termo $e^{+i\eta}$. Tal termo em $G(\vec{r}, \vec{r}')$ corresponde a uma onda incidente, o que contraria a Eq. (35).

Portanto, a solução da Eq. (25) será obtida levando-se a Eq. (46) na Eq. (35). Então:

$$\psi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) - \frac{2m\pi}{\hbar^2} \int \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} V(\vec{r}')\psi(\vec{r}')d^3\vec{r}'. \quad (45)$$

4. RESULTADOS

Para uma análise do comportamento da função de onda estacionária espalhada por um potencial coulombiano, vamos substituindo $V(\vec{r}')$ em (45) pelo potencial de Coulomb (1) com carga $Q = 1$ na equação integral (45), resultando em

$$\psi(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) + \lambda \int_0^\infty \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{1}{|\vec{r}'|} \psi(\vec{r}') d^3\vec{r}'. \quad (46)$$

onde $\lambda = -\frac{mQ^2}{2\hbar^2}$, e para facilitar análise gráfica é assumido $m = 2$, $E = 1/4$ e $\hbar = 1$, isso implica em $\lambda = -1$ e $k = 1$ em (29).

A função de onda estacionária ou autofunção (46) é uma equação integral do tipo Fredholm (5), cuja a solução é dada por (21). Com ajuda do programa Mathematica, foi calculado os determinantes (17) e (19) que logo é substituído em (22). Para solução em uma dimensão x obtém-se:

$$\psi(x) = e^{ix} + \frac{e^{6i} \text{sen}(4)}{x} \frac{\lambda}{1+\lambda[Ei(i)-Ei(5i)]} \quad (47)$$

onde a função $Ei(t)$ é a função exponencial integral dada por

$$Ei(t) = \int_t^\infty \frac{e^{-u}}{u} du \quad (48)$$

Com todas as considerações temos o resultado gráfico, Fig. 1, para essa função de onda com o potencial espalhador colombiano:

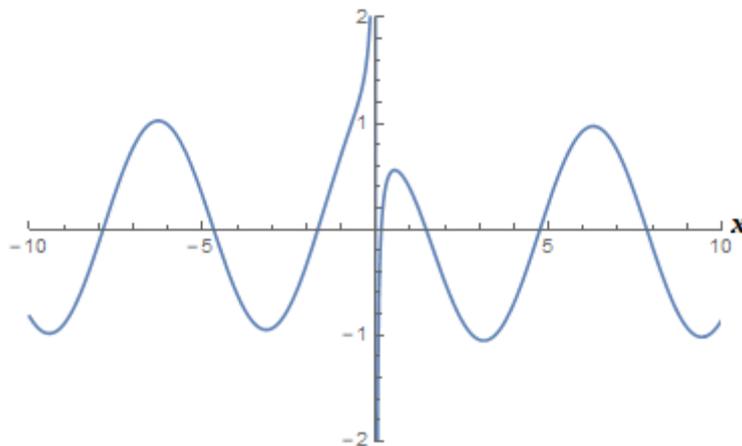


Figura 1- Função de onda para o potencial de Coulomb

Nota se no gráfico da Fig. 1, que a função de onda (47) em função da distância x tem um comportamento não definido em $x = 0$. A amplitude dessa onda varia fortemente entre $x = 0$ a $x = 5$.

O mesmo procedimento foi usado para se calcular a função de onda estacionária para o potencial de Podolsky (3), usando valores para constante $a = 1,2,3,4,5$. Resultando na função de onda

$$\psi(x) = e^{ix} + \frac{e^{2i-5a}(e^{4a}-e^{8i})}{x(a-2i)} \frac{\lambda}{1+\lambda[Ei(i-a)-Ei(5i-a)]} \quad (49)$$

Na Fig. 2 é mostrado as curvas para cada valores da constante de Podolsky “a”. Para $a = 1$ a função de onda é próxima da função de onda dada pelo potencial coulombiano, valores maiores de a mostra um comportamento mais estável indicando um amplitude tendendo para valores entre -1 a 1 antes de $x = 5$.

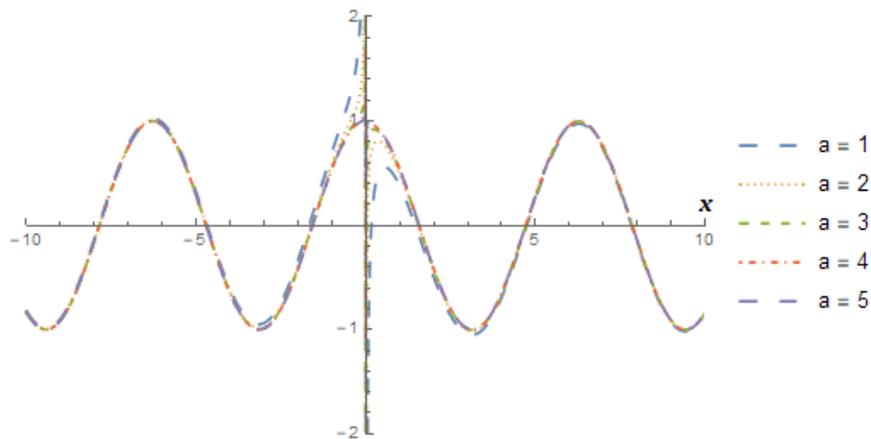


Figura 2- Função de onda para o potencial de Podolsky

A Fig. 3 mostra as funções de ondas com potencial espalhador de Coulomb e Podolsky e observa-se que para $a = 0$ reproduz a função de onda com potencial coulombiano. Valores para $a = 2, 5$ indicam uma tendencia para estabilizar a onda com amplitude constant antes do valor limite na distância $x = 5$. Depois desse limite, as ondas praticamente se propagam de forma semelhante.

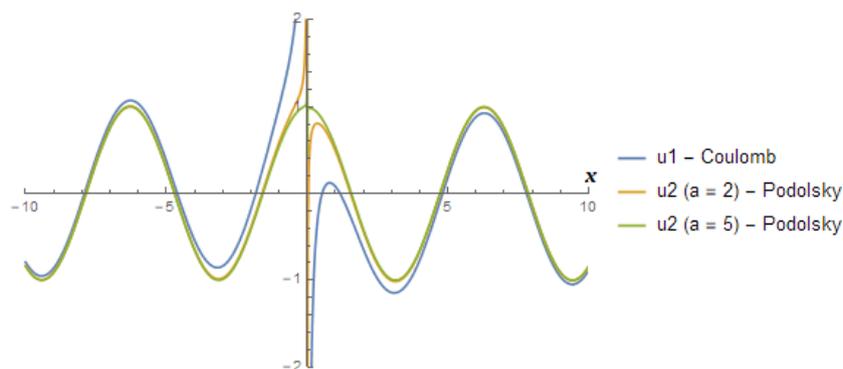


Figura 3- Funções de ondas espalhadas por Coulomb e Podolsky

Na Fig. 4 é um gráfico para valores da distância x e para valores contínuos de a variando de 0 até 5. Esse gráfico evidência a importância dos valores para a constante de Podolsky a .

Ela de fato promove um bom comportamento da função de onda com valores maiores que zero. Como essa constante a está conectada a dimensão de distância (Podolsky, 1948), isso explica porque a função de onda de Podolsky tem bom comportamento próximo de $x = 0$ para valores $a > 0$.

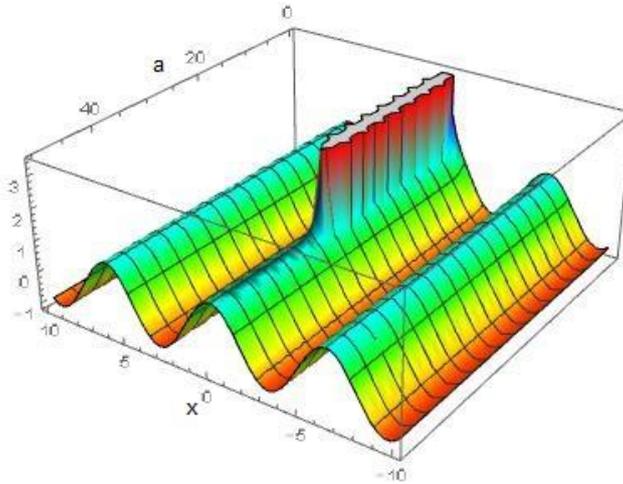


Figura 4- Função de onda espalhada por potencial de Podolsky

5. CONCLUSÃO

Neste trabalho foi investigado o efeito da interação no centro do espalhamento de uma partícula na função de onda estacionária. A equação de Schrödinger foi usada para dois tipos de potencial, um coulombiano e outro de Podolsky.

A técnica usada são as soluções de núcleos arbitrários via equação integral de Fredholm. O resultado deste trabalho mostra que na Fig. 3 a constante de Podolsky $a = 0$ reproduz a função de onda para o potencial de Coulomb e uma amplitude não definida em $x = 0$. Para valores $a = 1$ e 5 a função de onda para o potencial de Podolsky mantém uma amplitude constante em $x = 0$. Na Fig. 4 observa-se no gráfico que para valores de $a > 40$ não temos o problema da singularidade na função de onda em $x = 0$.

Agradecimentos

JHS ao CNPq pela bolsa de pesquisa e PHS ao PPGMC-UESC.

REFERÊNCIAS

- Bassalo, J. M. F. e Cattani, M. S. D. (2012), “Elementos de Física Matemática - Vol. 3 - Equações Integrais e Integrais”, Livraria da Física, São Paulo.
- Fredholm, I. (1900), “Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet”, Öfversigt Kongl. Vetenskaps-Akad. Förhandlingar.
- Krasnov, M. I.; Kisseliov, A. I.; Makarenko, G. I. (1981), “Equações Integrais”, Editora Mir, Moscow.
- Nguyen, D. C. et. al. (2011). “End-point energy measurements of field emission current in a continuous-wave normal-conducting rf injector”, Physical Review Special Topics – Accelerators and Beams
- Podolsky, B. e Schwed, P. (1948), “Review of a Generalized Electrodynamics”, Rev. Mod. Phys. 20, 40 (1948)
- Sakurai, J. J. (2013), “Mecânica Quântica moderna”, 2 ed., Bookman, Porto Alegre.