



08 a 11 de Outubro de 2018
Instituto Federal Fluminense
Búzios - RJ

A Reemergência da Sincronização no Modelo de Kuramoto

Jonas F. Oliveira¹ - jonasferoliveira.ufg@gmail.com

Celso Vieira Abud¹ - cabud.ufg@gmail.com

Júlio C. D. Fonseca¹ - jcfonseca26@yahoo.com.br

¹Universidade Federal de Goiás - Regional Catalão, Catalão-GO, Brasil

Resumo. Neste trabalho investigou-se o fenômeno da sincronização no modelo de Kuramoto em uma rede completa de osciladores com frequências naturais distribuídas aleatoriamente de acordo com a função de densidade de probabilidade (FDP) log-normal. Os cálculos numéricos da sincronização deram-se por meio do estudo do parâmetro de ordem, onde observou-se que a variação do parâmetro da FDP relacionado com a variância pode suprimir a sincronização do sistema, entretanto sob certas condições pode reaver tal sincronia. Discute-se que esse resultado atípico com relação ao comportamento da sincronização no modelo de Kuramoto é uma consequência das peculiaridades apresentadas pela FDP log-normal.

Keywords: Sincronização, Modelo de Kuramoto, Função de Densidade de Probabilidade log-normal.

1. INTRODUÇÃO

O fenômeno da sincronização coletiva tem-se mostrado fascinante para a comunidade científica, seja por sua beleza ou pela complexidade dos problemas estudados e como este fenômeno se manifesta nas mais variadas áreas da ciência, como: Neurociência (Borges et al., 2015) e (Breakspear Heitmann & Daffertshofer, 2010), sincronização fótica (Flores, 2012) e junções de Josephson (Wiesenfeld Colet & Strogatz, 1998).

O modelo de Kuramoto é um dos mais simples protótipos para o estudo do fenômeno da sincronização, proposto por Yoshiki Kuramoto em seu trabalho pioneiro na década setenta (Kuramoto, 1975). O Modelo de Kuramoto descreve uma população com um número finito de osciladores totalmente conectados entre si e que interagem por meio de uma força de acoplamento. Neste trabalho, a distribuição das frequências naturais foi dada de acordo com a FDP log-normal.

A FDP log-normal é assimétrica, unimodal e apresenta um comportamento peculiar, uma espécie de competição entre o ponto de máximo (a moda) da FDP e a sua cauda, conforme altera-se um de seus parâmetros. Tal particularidade da função tende a ser um objeto de estudo interessante em termos do modelo de Kuramoto, pois ao ser usada como a distribuição das

frequências naturais introduz ao sistema inicial uma grande quantidade de osciladores que compartilham da mesma frequência, contudo permite, também, com boa probabilidade a existência de osciladores com frequências bastantes divergentes. Assim, o presente trabalho dedica-se ao estudo dos efeitos causados pela FDP log-normal na sincronização do modelo Kuramoto.

As investigações numéricas realizadas por meio do cálculo do parâmetro de ordem relacionando-o com o fator de acoplamento e com o parâmetro da FDP, apontam um resultado contraintuitivo: a existência de sincronia em dois intervalos para um mesmo fator de acoplamento, fato que, até onde se sabe, não foi observado para nenhuma outra FDP unimodal, simétrica ou assimétrica.

O presente trabalho está dividido da seguinte maneira: Na Seção 2, apresenta-se o modelo de Kuramoto. A Seção 3, destina-se para apresentação da FDP log-normal. Na Seção 4, têm-se os resultados e discussões acerca da sincronização no modelo de Kuramoto com frequências naturais distribuídas conforme a função log-normal e, por fim, a Seção 5 apresenta as devidas conclusões sobre o trabalho.

2. O MODELO DE KURAMOTO

O modelo de Kuramoto (Kuramoto, 1975) consiste em uma população de N osciladores, cuja dinâmica é governada por um conjunto de equações diferenciais ordinárias acopladas:

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \text{sen}(\theta_j - \theta_i), \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

onde, θ_i é a fase do oscilador de índice i , $K > 0$ é o fator de acoplamento e ω_i é a frequência natural distribuída aleatoriamente de acordo com uma FDP $g(\omega)$.

Afim de obter uma visão mais clara do que acontecia com a dinâmica das fases dos osciladores, Kuramoto e Sakaguchi (Kuramoto & Sakaguchi, 1986) propuseram de forma conveniente a representação da população como uma nuvem de pontos que se movem sobre o círculo complexo. O denominado parâmetro de ordem complexo,

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j}, \quad (2)$$

onde $r(t)$ é o raio que mede a quantidade de sincronização das fases e $\psi(t)$ é a fase média de interação dos osciladores da rede (Strogatz, 2000). Se $r \approx 1$ os pontos da nuvem começam a mover-se como um único oscilador. A sincronização emerge se o fator acoplamento transcende um determinado valor crítico do fator de acoplamento K_c . É importante ressaltar que o fator de acoplamento crítico marca uma transição de fase do estado sincronizado para o não sincronizado. Numericamente o parâmetro de ordem pode ser calculado por,

$$r(t) = \frac{1}{N} \sqrt{\left(\sum_{j=1}^N \cos(\theta_j(t)) \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^N \text{sen}(\theta_j(t)) \right)^2}, \quad (3)$$

onde $\{\theta_j(t)\}_{j=1}^N$ é a solução numérica do modelo de Kuramoto no tempo t .

3. A FDP LOG-NORMAL

A função log-normal é uma densidade de probabilidade contínua de uma variável aleatória positiva ω , cujo seu logaritmo tem densidade normal, isto é, $\ln(\omega) \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. A função de densidade probabilidade é definida como,

$$g(\omega) = \frac{1}{\omega\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(\ln(\omega) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (4)$$

onde $\mu \in (-\infty, +\infty)$ e $\sigma > 0$ são os parâmetros de ajuste da FDP que se relacionam com os conceitos estatísticos da média e da variância, respectivamente, por,

$$e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}, \quad (5)$$

$$(e^{\sigma^2} - 1)[e^{2\mu + \sigma^2}], \quad (6)$$

Na Fig.1 tem-se os gráficos da FDP e seus perfis para determinados valores de σ . A log-normal é uma FDP unimodal, o que corresponde dizer que o seu ponto mais alto (a moda) é um ponto de máximo, encontrado por $g' = 0$, o que resulta em $\omega = e^{\mu - \sigma^2}$.

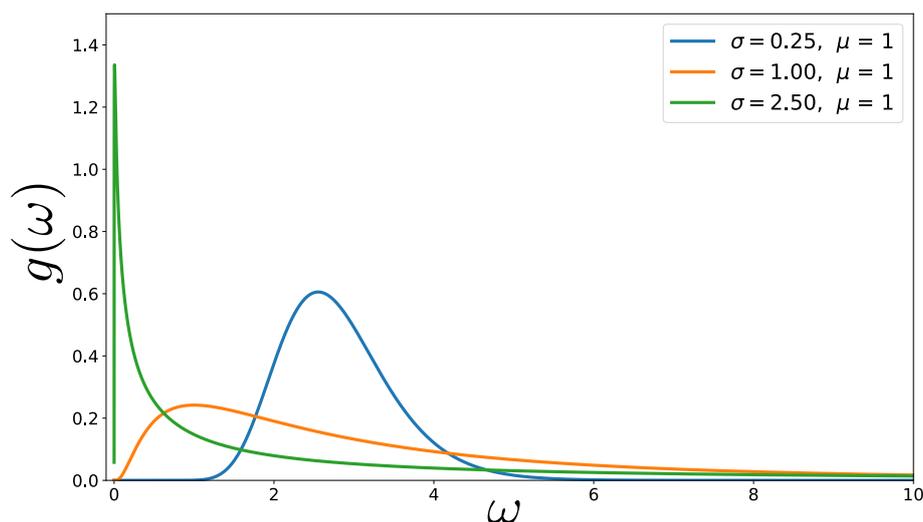


Figura 1- Log-normal com três valores de σ and $\mu = 1$.

Seja μ fixo, o aumento de σ tem as seguintes consequências sobre esta função de densidade de probabilidade. Primeiramente, a moda da log-normal tende a zero conforme σ é incrementado. Segunda consequência, no intervalo $\sigma_{min} \approx 0$ e $\sigma_{max} \approx \infty$, a altura do pico da função decresce de σ_{min} até σ_c e torna a crescer conforme σ aumenta, de σ_c até σ_{max} . Terceira consequência, o incremento de σ faz com que a média da FDP log-normal, definida pela Eq.5 seja divergente. E, por último, uma outra característica importante da log-normal, influenciada pelo crescimento de σ , é a sua "cauda pesada" (Foss, 2013), ou seja, uma cauda espessa e longa.

Nos fatos supracitados, observa-se que há uma espécie de competição entre a altura do pico e a cauda da FDP log-normal, uma vez que, o incremento de σ , leva ao aumento da altura do pico, mas também ao aumento da espessura da cauda.

Agora, pensando na FDP log-normal como a função g das frequências naturais do modelo de Kuramoto, a curiosidade dessa implementação sobre a sincronização do modelo encontra-se no

fato de que a competição entre o pico e a cauda da FDP log-normal pode estabelecer diferentes comportamentos para a sincronização, uma vez que as frequências naturais serão distribuídas de maneira que uma quantidade significativa da população dos osciladores terá suas frequências ajustadas com velocidades baixas, porém uma outra parte menor da população terá frequências mais velozes estabelecidas ao longo da cauda pesada. Na próxima seção, são apresentados os resultados e discussões da escolha da FDP log-normal no modelo de Kuramoto.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com o intuito de melhor compreender os efeitos da FDP log-normal sobre o modelo de Kuramoto, foram elaborados dois diagramas que apontam o comportamento do parâmetro de ordem em função do fator de acoplamento K e do parâmetro σ da FDP :

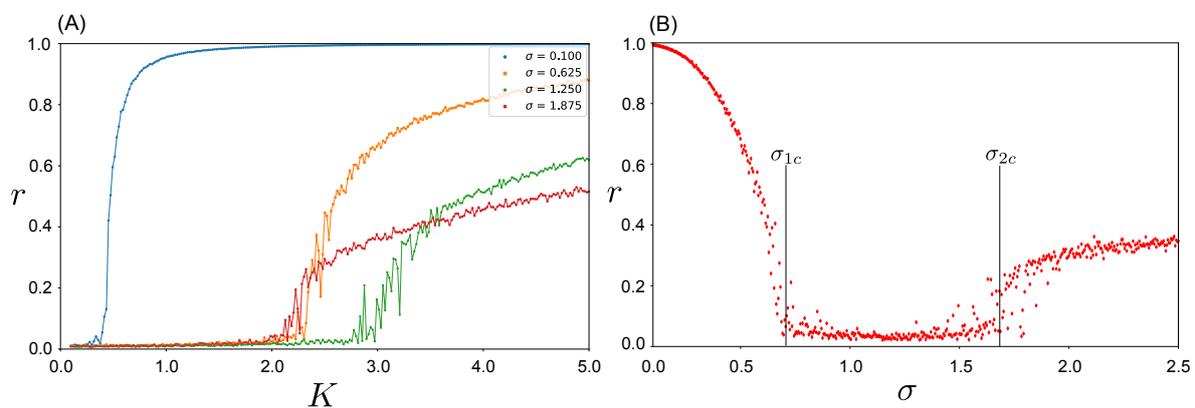


Figura 2- (A) parâmetro de ordem r versus K , cada ponto indica r calculado pela Eq.3 para um tempo suficientemente longo, $N = 1 \times 10^4$ osciladores, cada curva está associada a um valor do parâmetro σ da distribuição das frequências naturais do modelo (B) Diagrama parâmetro de ordem r versus σ , cada ponto indica r calculado pela Eq.3 para um tempo suficientemente longo, $N = 5 \times 10^4$ osciladores e fator de acoplamento $K = 2.5$.

A Fig.2 (A) mostra como o parâmetro σ afeta o surgimento da sincronização no modelo. Como citado na seção 1, a sincronização surge no modelo quando o fator de acoplamento K , ultrapassa um determinado valor crítico, K_c . Observa-se que o parâmetro σ da FDP log-normal influencia de forma não usual o deslocamento desse valor crítico, uma vez que, conforme σ é incrementado é de se esperar que esse ponto crítico onde a sincronização emerge apareça para outro valor de K , mais alto. Entretanto, não é isso que acontece para o caso da distribuição das frequências dada segundo a FDP log-normal, pois o ponto crítico K_c , desloca-se da esquerda para a direita, conforme σ é incrementado, porém observa-se que para um determinado σ tal movimentação do ponto crítico retorna a esquerda. Assim sendo, a primeira observação mostra que a FDP log-normal desloca de maneira não usual o fator de acoplamento crítico provocando o crescimento desse a direita e retornando-o a esquerda.

A Fig.2 (B) ilustra por meio de um diagrama r versus σ o comportamento do parâmetro de ordem quando as frequências naturais do modelo de Kuramoto são distribuídas segundo a FDP log-normal, com K fixado ($K = 2.5$). É possível observar que o aumento do parâmetro σ causa um decaimento no parâmetro de ordem até suprimir a sincronia do sistema em um primeiro ponto crítico σ_{1c} , porém para um $\sigma_{2c} > \sigma_{1c}$ a sincronia retorna ao sistema. Essa segunda observação mostra que existem ao menos duas regiões no diagrama r versus σ que apresentam

sincronização. Um resultado contra intuitivo, uma vez que o parâmetro σ está relacionado com a variância da distribuição era de se esperar que ao incrementar o valor da variância a população de osciladores perdesse a capacidade de sincronia, por estarem sendo distribuídas frequências de maneira mais dispersa.

5. CONCLUSÕES

O fenômeno da sincronização no modelo de Kuramoto com frequências naturais distribuídas conforme a FDP log-normal foi investigado. A log-normal é uma FDP unimodal e assimétrica ajustada pelos parâmetros μ e σ que se relacionam com a média e a variância de acordo com as Eqs. 5 e 6, respectivamente. A particularidade da FDP log-normal, especialmente no que tange ao comportamento de seu pico e de sua cauda à direita, conforme o aumento do parâmetro σ , mostrou-se uma característica interessante a ser investigada no modelo de Kuramoto. Por meio da análise dos diagramas (A) e (B) da Fig.2, foi possível constatar um comportamento atípico causado pela escolha particular da FDP log-normal como a distribuição das frequências naturais. Descobriu-se que o incremento do parâmetro σ pode levar o sistema a perder a sincronia, contudo a continuidade desse incremento sobre o parâmetro σ pode, ainda, reaver tal sincronia. Conjectura-se que o restabelecimento da sincronia está diretamente relacionado com as particularidades apresentadas pela competição entre o pico e a cauda da FDP log-normal.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Goiás pelo fomento concedido para realização deste trabalho.

REFERÊNCIAS

- Borges, R. R., Iarosz, K. C., Batista, A. M., Caldas, I. L., Borges, F. S., & Lameu, E. L. (2015). *Sincronização de disparos em redes neuronais com plasticidade sináptica*. Caderno Brasileiro de Ensino de Física, 37(2).
- Breakspear, M., Heitmann, S., & Daffertshofer, A. (2010). *Generative models of cortical oscillations: neurobiological implications of the Kuramoto model*. Frontiers in human neuroscience, 4, 190.
- Flôres, D. E. D. F. L. (2012). *Investigando a sincronização fótica na natureza*. Revista da Biologia.
- Foss, S., Korshunov, D., & Zachary, S. (2013). *Heavy-tailed and long-tailed distributions*. In *An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions* (pp. 7-42). Springer, New York, NY.
- Kuramoto, Y. (1975). *Self-entrainment of a population of coupled non-linear oscillators*. In International symposium on mathematical problems in theoretical physics (pp. 420-422). Springer, Berlin, Heidelberg.
- Sakaguchi, H., & Kuramoto, Y. (1986). *A soluble active rotator model showing phase transitions via mutual entertainment*. Progress of Theoretical Physics, 76(3), 576-581.
- Strogatz, S. H. (2000). *From Kuramoto to Crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators*. Physica D: Nonlinear Phenomena, 143(1-4), 1-20.
- Wiesenfeld, K., Colet, P., & Strogatz, S. H. (1998). *Frequency locking in Josephson arrays: Connection with the Kuramoto model*. Physical Review E, 57(2), 1563.

The Reemergence of Synchronization in the Kuramoto Model

Abstract. *This work is dedicated to the study of the Kuramoto Model of globally coupled oscillators with natural frequencies randomly distributed according to a Log-Normal probability*

density function (PDF). The Log-Normal is an unimodal asymmetric function tuned by two parameters that are related to its mean and variance. We analyzed the order parameter and we observed that the variation of the parameter related to the variance can destroy the synchronization of the system but under certain conditions also recover such synchronization. We indicate that the emergence of synchronization recovery is due to particular properties of the log-normal distribution.

Keywords: *Synchronization, Kuramoto Model, The log-normal PDF*